

- продолжительность работы над заданием 1 час 15 минут;
- неправильный ответ оценивается четвертью баллов, предусмотренных за данный вопрос и засчитывается со знаком «минус», в то время, как не дав ответа, вы сохраняете уже набранные баллы;
- на каждый вопрос имеется только один правильный ответ;
- пользоваться калькулятором запрещено!;
- победители определяются по двум критериям: Вы можете или набрать максимальное количество баллов, или ответить на максимальное количество вопросов по порядку без ошибки, начиная с первого.

Задание по математике для учащихся 11 классов

Задачи с 1 по 10 оцениваются по 3 балла

1. В конкурсе «Кенгуру» Паскаль дал правильные ответы на 25 вопросов и ошибочные на 3 вопроса. На остальные он не ответил. Каким может быть его максимальное количество баллов?

- А) 102,75; Б) 128,25; В) 132,75; Г) 134; Д) другой ответ.

2. Я жил в Сиракузах приблизительно 22 века тому назад; я рассчитал площадь сектора параболы и другие вещи; я доказал, что боковая поверхность цилиндра, описанного вокруг сферы, равна площади поверхности этой сферы; некоторой спирали присвоили мое имя, но, что самое известное, я сказал: «Дайте мне рычаг и ...». Кто я?

- А) Цицерон; Б) Перикл; В) Архимед; Г) Евклид; Д) Августин.

3. Если раскрыть выражение $(2x - 1)^{1995}$ по убывающим степеням x , получаем: $a_{1995}x^{1995} + a_{1994}x^{1994} + \dots + a_0$, тогда сумма $a_{1995} + a_{1994} + \dots + a_0$ равна:

- А) 0; Б) 1; В) 1995; Г) -1; Д) 2.

4. Если $x < 0$, тогда $|x - \sqrt{(x-1)^2}|$ равно:

- А) 1; Б) $1 - 2x$; В) $-2x - 1$; Г) $1 + 2x$; Д) $2x - 1$.

5. Произведение $4^{(1/3)} \times 8^{(1/4)}$ равно:

- А) $12^{(1/7)}$; Б) $2(12^{(1/7)})$; В) $32^{(1/7)}$; Г) $32^{(1/12)}$; Д) $2(32^{(1/12)})$.

6. R положительно. Прямая $x + y = R$ касательна к окружности $x^2 + y^2 = R^2$. R равно:

- А) $\frac{1}{2}$; Б) 1; В) 2; Г) $\sqrt{2}$; Д) $2\sqrt{2}$.

7. Если (x, y, z) есть решение системы $\begin{cases} yz = -6; \\ zx = 2; \\ xy = -3 \end{cases}$, тогда $x + y + z$ равно:

- А) 0; Б) 1; В) 0 или 1; Г) 0 или -1; Д) 1 или -1.

24. Если $b > 1$, $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ и $\log_b \sin x = a$, тогда $\log_b \cos x$ равен:

- А) $2\log_b \left(1 - \frac{a}{b^2}\right)$; Б) $\sqrt{1 - a^2}$; В) b^{a^2} ; Г) $\frac{1}{2} \log_b(1 - b^{2a})$; Д) другой ответ.

25. Имеется утверждение «Если идет дождь, то в моем саду сыро». Какое высказывание является отрицанием этого утверждения?

- А) «Если не идет дождь, то в моем саду не сыро»;
 Б) «Если не идет дождь, то в моем саду сыро»;
 В) «Если в моем саду не сыро, то дождь не идет»;
 Г) «Идет дождь, и в моем саду не сыро»;
 Д) другой ответ.

26. C_1, C_2, C_3 – три параллельные хорды одной полуокружности. Расстояние между C_1 и C_2 равно расстоянию между C_2 и C_3 . Длины хорд 20, 16 и 8. Радиус окружности равен:

- А) 12; Б) $4\sqrt{7}$; В) $\frac{5\sqrt{65}}{3}$; Г) $\frac{5\sqrt{22}}{2}$; Д) недостаточно данных.

27. Предположим, что $f(x)$ определена для всех действительных x ; $f(x) > 0$ для любого x ; $f(a)f(b) = f(a + b)$ для любых a и b . Какие из утверждений верны:

- 1) $f(0) = 1$; 2) $f(-a) = \frac{1}{f(a)}$ для любого a ;

- 3) $f(a) = (f(3a))^{1/3}$ для любого a ; 4) $f(b) > f(a)$, $b > a$?

- А) только 3 и 4; Б) только 1, 3 и 4; В) только 1, 2 и 4;
 Г) только 1, 2, и 3; Д) все верны.

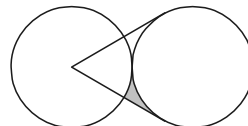
28. Если k – целое число и f – функция такая, что для любого положительного x

$[f(x^2 + 1)]^{\sqrt{x}} = k$, тогда для любого положительного y $[f((x^2 + 9)/y^2)]^{\sqrt{12}}$ равно:

- А) \sqrt{k} ; Б) $2k$; В) $k\sqrt{k}$; Г) k^2 ; Д) $y\sqrt{k}$.

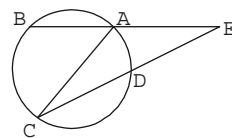
29. Две одинаковые окружности радиуса 10 касаются как показано на рисунке. Две касательные к правой окружности пересекаются в центре левой. Если S – площадь серой области, какое из чисел ближе всех к S ?

- А) 6; Б) 7; В) 8; Г) 9; Д) 10.



30. На рисунке угол E равен 40° , а дуги AB, BC и CD имеют одинаковую длину. Чему равен угол ACD ?

- А) 10° ; Б) 15° ; В) 20° ; Г) 30° ; Д) другой ответ.



8. Площадь прямоугольника $A = 1000 \text{ м}^2$. Окружность радиуса касательна к трем его сторонам. Какое самое большое число k , для которого $r > k$?

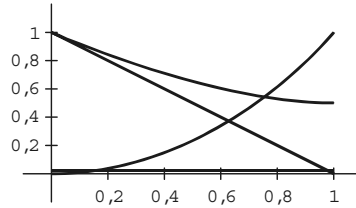
- А) $k = 0$; Б) $k = 1$; В) $k = 10$; Г) $k = \sqrt{1000}$; Д) никакое действительное.

9. Если c – действительное число и если одно из отрицательных решений уравнения $x^2 - 3x + c = 0$ является также решением уравнения $x^2 + 3x - c = 0$, тогда корнями уравнения $x^2 - 3x + c = 0$ являются:

- А) 1, 2; Б) -1, -2; В) 0, 3; Г) 0, -3;
 Д) $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$.

10. Какая из следующих функций не представлена на рисунке (x изменяется от 0 до 1)?

- А) $f(x) = 1 - \cos[x\pi]$; Б) $g(x) = x^2$;
 В) $h(x) = 1 - x$; Г) $j(x) = (x - 1)^2$;
 Д) $k(x) = 1/(x + 1)$.



Задачи с 11 по 20 оцениваются по 4 балла

11. Очевидно, что $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots$. Определяем последовательность вида

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Эта последовательность:

- А) расходится; Б) сходится к 1; В) сходится к 0;
 Г) сходится к $l \in [0, 1]$; Д) сходится к $l \in [1, \infty)$.

12. Среди всех комплексных чисел, удовлетворяющих $z(1 + z^2) = 2$, число z имеет самый большой модуль. Этот модуль:

- А) 1; Б) 2; В) $5\frac{\sqrt{2}}{2}$; Г) $\sqrt{8}$; Д) другой ответ.

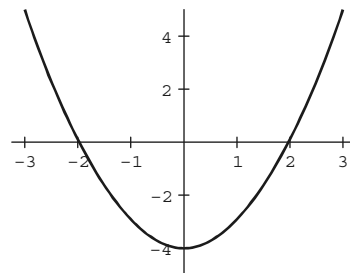
13. Из всех областей плоскости, определенных следующими неравенствами, сколько ограничены:

- 1) $|x + y| < 1$; 2) $x^2 + y^2 < 1$; 3) $|x| + |y| < 1$; 4) $|xy| < 1$; 5) $||x| - |y|| < 1$?

- А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4; Д) 5.

14. График на рисунке, симметричный относительно оси yOy , представляет дифференцируемую функцию, которая является производной функции f . Какое из следующих утверждений ошибочно?

- А) f определена и непрерывна от -3 до 3;
 Б) если $f(0) = 0$, то f нечетна от -3 до 3;
 В) график f имеет максимум в точке -2;
 Г) f не может сохранять постоянный знак от -3 до 3;
 Д) график f имеет в точке 0 точку перегиба.



15. Марио, игрок, и Хельмут, банкомат, играют на деньги в карточную игру. В начале (этап 0) каждый имеет по 1000\$. На этапе $n + 1$ у Марио столько денег, сколько было у него и Хельмута на этапе n , в то время как Хельмут располагает суммой, равной той, которая была у Марио на этапе n . Таким образом, сразу после старта (этап 1) Марио имеет 2000\$, а Хельмут – 1000\$. Какая сумма у Хельмута на этапе 1996?

- А) 1000\$; Б) 2000\$; В) -1996000\$; Г) 0\$; Д) другой ответ.

16. Зная, что $\text{Ln}(10)$ приблизительно равен 2,30, определить порядок величины числа цифр в десятичной записи целого числа n для которого $\text{Ln}(\text{Ln}(n)) = 20 \dots$

- А) 10^3 ; Б) 10^6 ; В) 10^8 ; Г) 10^{10} ; Д) 10^{12} .

17. Если θ – острый угол и $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$, тогда $\text{tg} \theta$ равен:

- А) x ; Б) $\frac{1}{x}$; В) $\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$; Г) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; Д) $\sqrt{x^2-1}$.

18. Какие положительные числа x являются корнями уравнения $(\log_3 x)(\log_5 x) = \log_3 5$?

- А) только 3 и 5; Б) только 3, 5 и 15;
 В) только числа вида $5^n 3^m$, где n и m – целые, положительные;
 Г) все положительные x , кроме $x \neq 1$; Д) никакие.

19. Если $1 + \sqrt{2}$ есть корень функции $f(x) = x^2 + px + q$, где p и q целые числа, тогда $p + q$ равно:

- А) -5; Б) -1; В) 3; Г) -3; Д) 5.

20. Для какого самого маленького целого положительного нечетного n произведение $\frac{1}{2^7} \cdot 2^{\frac{3}{7}} \cdot \dots \cdot 2^{\frac{2n+1}{7}}$ больше 1000?

- А) 7; Б) 9; В) 11; Г) 17; Д) 19.

Задачи с 21 по 30 оцениваются по 5 баллов

21. Чему равно число действительных корней уравнения $(x^2 - 1)^3 - 3(x^2 - 1)^2 + 1 = 0$?

- А) 6; Б) 4; В) 2; Г) 1; Д) другой ответ.

22. Число локальных экстремумов функции $f(x) = 2x - 3x^2 + \sin x$ равно:

- А) 4; Б) 2; В) 1; Г) 0; Д) другой ответ.

23. Поезд состоит из 5 вагонов: A, B, C, D, E . Сколькими способами можно сформировать поезд, чтобы вагон A был перед B (B не обязательно должен стоять сразу после A)?

- А) 120; Б) 30; В) 60; Г) 48; Д) другой ответ.